

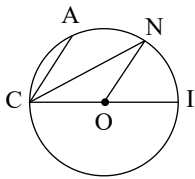
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: هندسه یازدهم (۱)

دبیرستان دانشمند

۱) دایره (C) به شعاع ۲ از نقطه A به زاویه 60° رؤیت می‌شود. اگر O مرکز دایره و T نقطه مماس خطی که از A می‌گذرد با دایره باشد، مساحت مثلث AOT کدام است؟

- ۱) $4\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $8\sqrt{3}$



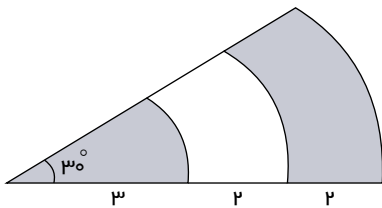
۲) در دایره مقابل به قطر CI داریم: $CA \parallel ON$ و $\hat{ACI} = 70^\circ$ ، زاویه CNO چند درجه است؟

- ۱) 27.5 ۲) 30 ۳) 35 ۴) 32.5

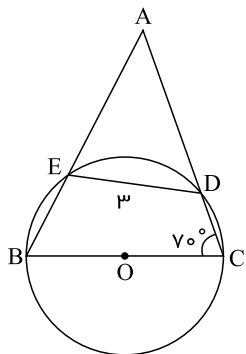
۳) در دایره‌ای به شعاع ۵ از نقطه A به فاصله ۴ از مرکز وتری به کدام طول نمی‌توان رسم کرد؟

- ۱) 10 ۲) 7 ۳) 6 ۴) 5

۴) در شکل زیر، قطاع‌هایی با زاویه 30° درجه از سه دایره هم‌مرکز نشان داده شده است. با توجه به اندازه‌های داده شده، مجموع مساحت قسمت‌های هاشورخورده چند واحد مربع است؟



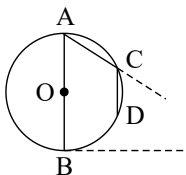
- ۱) 2.25π ۲) 2.75π ۳) 4.5π ۴) 5.5π



۵) در شکل زیر، شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه کمان $\widehat{EDC}$ به درجه کدام است؟

- ۱) 80 ۲) 90 ۳) 100 ۴) 120

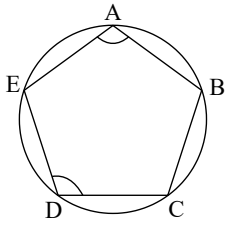
۶) در دایره‌ی زیر، O مرکز دایره است. وتر CD موازی با AB و به اندازه‌ی نصف آن، رسم شده است. اگر از B مماسی بر دایره رسم کنیم، امتداد وتر AC ، این مماس را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟



- ۱) 15° ۲) 30° ۳) 45° ۴) 60°

۷) در دایره‌ای به قطر AB ، وتر CD موازی قطر AB رسم شده است، اندازه $|\hat{ACD} - \hat{ADC}|$ کدام است؟

- ۱) 30° ۲) 45° ۳) 20° ۴) 90°



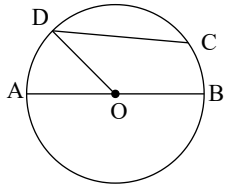
۸ در شکل زیر، اگر $\widehat{BC} = 70^\circ$ باشد، حاصل $\hat{A} + \hat{D}$ کدام است؟

۲۱۵° (۲)

۲۰۵° (۱)

۲۲۵° (۴)

۲۳۵° (۳)



۹ در شکل زیر، اگر O مرکز دایره، $\hat{ODC} = 40^\circ$ و $\hat{AD} = 30^\circ$ باشد، اندازه کمان $\widehat{BC}$ کدام است؟

۵۰° (۲)

۴۰° (۱)

۷۰° (۴)

۶۰° (۳)

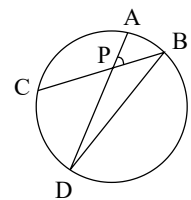
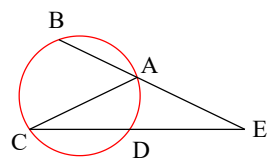
۱۰ در شکل مقابل $\hat{E} = 40^\circ$ و کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{BC}$ و $\widehat{CD}$ دارای طول‌های برابر هستند. اندازه $\widehat{ACD}$ کدام است؟

۱۵° (۲)

۱۰° (۱)

۲۵° (۴)

۲۰° (۳)



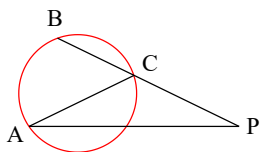
۱۱ در شکل روبه‌رو $\hat{D} = \frac{1}{3}\hat{B}$ زاویه $\hat{P}$ چند برابر کمان $\widehat{AB}$ است؟

۱ (۲)

۳ (۱)

۲ (۴)

۱٫۵ (۳)



۱۲ در شکل مقابل $\hat{P} = 32^\circ$ و مثلث ACP متساوی‌الساقین است، اندازه کمان $\widehat{AB}$ کدام است؟

۷۴° (۲)

۶۹° (۱)

۱۲۸° (۴)

۸۶° (۳)

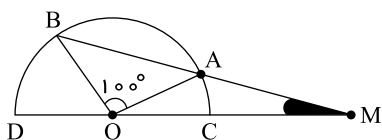
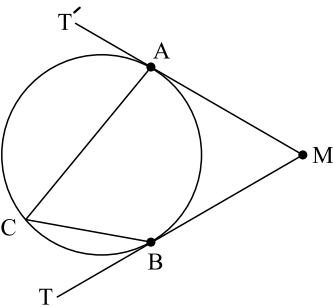
۱۳ در شکل روبه‌رو، زاویه بین دو مماس رسم‌شده از نقطه M بر دایره برابر 60° است. اگر $\hat{CBT} = 40^\circ$ باشد، اندازه $\widehat{CAM}$ کدام است؟

۱۰۰° (۱)

۱۱۰° (۲)

۱۲۰° (۳)

۱۳۰° (۴)



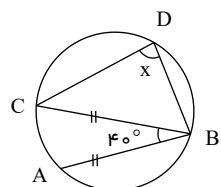
۱۴ در شکل مقابل MA با شعاع دایره برابر است. اندازه زاویه M چقدر است؟

۲۰° (۲)

۱۰° (۱)

۳۰° (۴)

۱۵° (۳)



۱۵ در شکل مقابل، $\widehat{ABC} = 40^\circ$ و $AB = BC$ ، اندازه $\widehat{BDC}$ چند درجه است؟

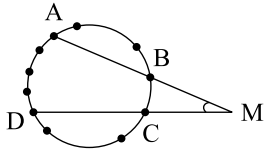
۱۰۵ (۲)

۱۰۰ (۱)

۱۱۵ (۴)

۱۱۰ (۳)

۱۶) مطابق شکل محیط دایره به ۲۴ کمان مساوی تقسیم می‌شود و زاویه M زاویه‌ای است که محل برخورد دو وتر AB و CD است. زاویه M چند درجه است؟



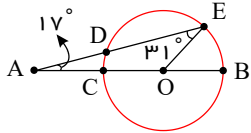
۳۷٫۵ (۲)

۲۲٫۵ (۱)

۳۰ (۴)

۲۷٫۵ (۳)

۱۷) در دایره مقابل، O مرکز دایره، $\hat{A} = 17^\circ$ ، $\hat{E} = 31^\circ$ است. اندازه کمان $\widehat{CD}$ کدام است؟



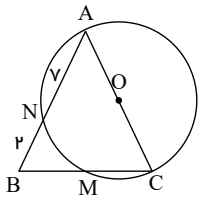
۱۹° (۲)

۱۴° (۱)

۲۴° (۴)

۲۲° (۳)

۱۸) در شکل زیر، مثلث ABC متساوی‌الساقین است ($AB = AC$)، $AN = 7$ ، $BN = 2$ و O مرکز دایره است. اندازه قاعده BC کدام است؟



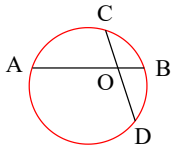
۴٫۸ (۲)

۴ (۱)

۷٫۲ (۴)

۶ (۳)

۱۹) در دایره مقابل $OB = 4$ ، $OA = 9$ و $OC = 5$ ، اندازه OD کدام است؟



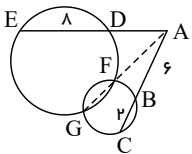
۵٫۴ (۲)

۳٫۶ (۱)

۸٫۴ (۴)

۷٫۲ (۳)

۲۰) در شکل مقابل، اندازه AE کدام است؟



۴ (۲)

۲ (۱)

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۲۱) طول خط‌المركزین دو دایره مماس درونی ۳٫۵ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره کوچک تر، چند سانتی‌متر است؟

۲٫۷۵ (۴)

۲٫۲۵ (۳)

۱٫۷۵ (۲)

۱٫۲۵ (۱)

۲۲) طول خط‌المركزین دو دایره به شعاع‌های ۵ و ۸ برابر ۴ است، این دو دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟

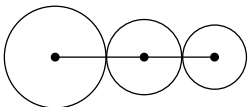
مماس (۴)

متخارج (۳)

متقاطع (۲)

متداخل (۱)

۲۳) سه دایره به شعاع‌های ۱ و ۳ و ۵ مراکزشان روی یک خط راست و مطابق شکل بر هم مماس هستند. چند خط می‌توان رسم کرد که بر هر سه دایره مماس باشد؟



۱ (۲)

صفر (۱)

بی‌شمار (۴)

۲ (۳)

۲۴) دو دایره $C(O, 3a - 1)$ و $C'(O', a + 5)$ دارای یک مماس مشترک‌اند. اگر طول خط‌المركزین این دو دایره $3a$ باشد، مقدار a کدام است؟

$\frac{5}{7}$ (۴)

$\frac{7}{5}$ (۳)

$\frac{5}{6}$ (۲)

$\frac{6}{5}$ (۱)

۲۵) دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۴ در نقطه A بر هم مماس خارج‌اند و خط d در نقاط B و C بر این دو دایره مماس رسم شده است. شعاع دایره محیطی مثلث ABC کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

۲۶) نزدیک ترین فاصله نقاط دایره $C = (O, 2)$ از نقاط دایره $C' = (O', 4)$ برابر ۴ سانتی متر است. طول مماس مشترک داخلی دو دایره کدام است؟

۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۲۷) دو دایره $C(O, 2)$ و $C'(O', 8)$ مماس خارج یکدیگرند. اگر طول خط‌المركزین دو دایره ۴ واحد افزایش یابد، طول مماس مشترک داخلی آنها چقدر خواهد شد؟

$4\sqrt{6}$ (۴)

۱۰ (۳)

$6\sqrt{3}$ (۲)

$4\sqrt{10}$ (۱)

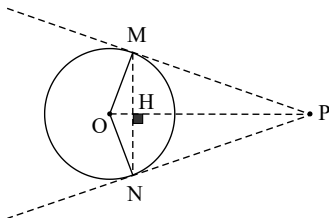
۲۸) کدام رابطه نادرست است؟

$PM = PN$ (۱)

$OH \times HP = MH^2$ (۲)

$R^2 = PH \times OP$ (۳)

$OP \times MN = 2R \times PM$ (۴)



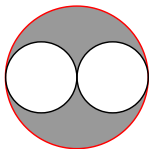
۲۹) در شکل زیر اگر قطر دو دایره کوچک برابر شعاع دایره بزرگ باشد، مساحت ناحیه رنگی چه کسری از مساحت دایره بزرگ است؟

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۱)

$\frac{3}{8}$ (۳)



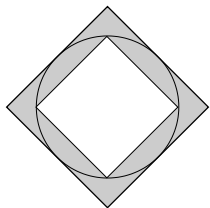
۳۰) در شکل مقابل شعاع دایره ۴ واحد است. مساحت قسمت هاشورخورده چقدر است؟

۲۴ (۲)

۳۲ (۴)

۱۶ (۱)

۲۸ (۳)

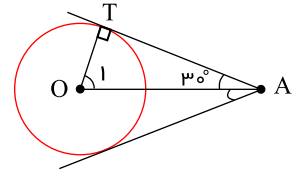


پاسخ نامه تشریحی

۱ مطابق شکل، در مثلث AOT زاویه $\hat{O}_1$ برابر 60° درجه است داریم:

$$OT = 2, \tan \hat{O}_1 = \frac{AT}{OT} \xrightarrow{\hat{O}_1 = 60^\circ} \sqrt{3} = \frac{AT}{2} \Rightarrow AT = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{OAT} = \frac{OT \times AT}{2} = \frac{2 \times 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

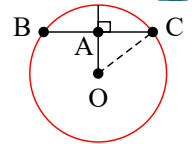


۲

$$\begin{cases} OC = ON \Rightarrow \widehat{OCN} = \widehat{ONC} \\ ON \parallel CA \Rightarrow \widehat{ONC} = \widehat{ACN} \end{cases} \Rightarrow \widehat{OCN} = \widehat{ACN} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \Rightarrow \widehat{CNO} = 35^\circ$$

۳ از نقطه ای درون دایره، وترهایی می توان رسم کرد که طول آنها بین وتر منیمم و قطر باشد. طول وتر منیمم در A را حساب می کنیم:

$$\triangle OAC : (OA)^2 + (AC)^2 = (OC)^2 \Rightarrow 4^2 + AC^2 = 5^2 \Rightarrow AC = 3$$



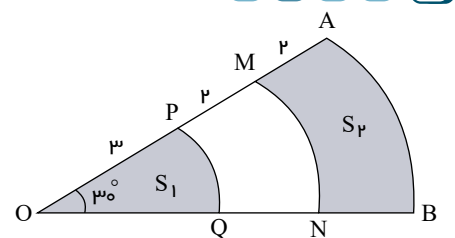
بنابراین اندازه وتر منیمم برابر ۶ می باشد پس طول وتر در فاصله زیر قرار دارد:

$$6 \leq \text{طول وتر} \leq 10$$

۴

$$S_1 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 3^2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$S_r = S_{OAB} - S_{OMN}$$



$$\Rightarrow S_r = \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 3^2 - \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2 = \frac{\pi}{12} (49 - 25) = 2\pi$$

$$S_1 + S_r = 2\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{11\pi}{4} = 2.75\pi$$

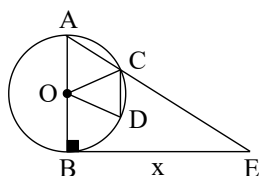
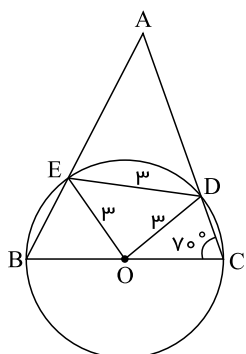
۵

مطابق فرض و شکل زیر، مثلث EOD متساوی الاضلاع است. داریم:

$$OE = OD = ED = 3 \rightarrow \widehat{EOD} = 60^\circ \rightarrow \widehat{ED} = 60^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{\widehat{BED}}{2} = \frac{\widehat{BE} + \widehat{ED}}{2} \rightarrow 70^\circ = \frac{\widehat{BE} + 60^\circ}{2} \rightarrow \widehat{BE} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EDC} = 180^\circ - \widehat{BE} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$



از O به C و D وصل می کنیم، در این صورت مثلث ODC متساوی الاضلاع است (چرا؟) و در نتیجه $\widehat{COD} = 60^\circ$ همچنین ثابت می شود $\triangle OAC$ هم متساوی الاضلاع است و $\widehat{OAC} = 60^\circ$.

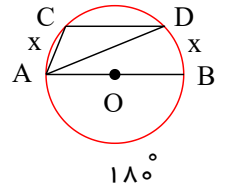
از آن جا که شعاع دایره، بر مماس رسم شده از یک نقطه ی واقع بر دایره، در آن نقطه عمود است، پس $\widehat{OBE} = 90^\circ$ و در نتیجه در مثلث ABE داریم $\widehat{E} = 30^\circ$ که زاویه ی میان امتداد AC و BE است.

۷ می دانیم که کمان های بین دو وتر موازی با هم برابرند:

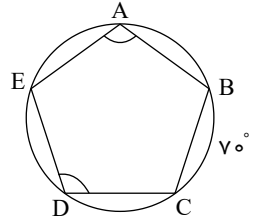
$$CD \parallel AB \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} = x$$

در نتیجه با توجه به شکل داریم:

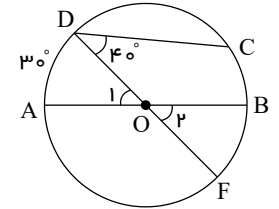
$$|\widehat{ACD} - \widehat{ADC}| = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 9^\circ$$



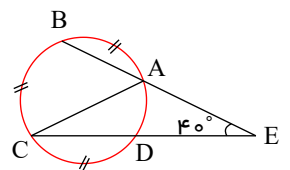
۱ ۲ ۳ ۴ ۸



۱ ۲ ۳ ۴ ۹



۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰



با حل دستگاه دو معادله دوجمله‌ای حاصل از معادلات (I) و (II)، داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} = \frac{\widehat{EDCB}}{2} \\ \widehat{D} = \frac{\widehat{EABC}}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = \frac{\widehat{EDCB} + \widehat{EABC}}{2} \rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = \frac{\widehat{ED} + \widehat{DC} + \widehat{CB} + \widehat{EA} + \widehat{AB} + \widehat{CB}}{2}$$

$$\rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = \frac{(\widehat{ED} + \widehat{DC} + \widehat{CB} + \widehat{EA} + \widehat{AB}) + 70^\circ}{2} = \frac{360^\circ + 70^\circ}{2} = \frac{430^\circ}{2} \rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 215^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{O}_1 = \widehat{AD} = 30^\circ = 30^\circ \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{O}_2 = 30^\circ \Rightarrow \widehat{BF} = 30^\circ$$

$$\widehat{ODC} = 40^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{CBF}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{BF} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BC} + 30^\circ = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 50^\circ$$

برای تعیین مقدار زاویه $\widehat{ACD}$ ، باید کمان $\widehat{AD}$ را به دست آوریم:

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \xrightarrow{\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}} 3\widehat{BC} + \widehat{AD} = 360^\circ \quad (I)$$

$$\widehat{E} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AD}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BC} - \widehat{AD} = 80^\circ \quad (II)$$

$$\begin{cases} 3\widehat{BC} + \widehat{AD} = 360^\circ \\ \widehat{BC} - \widehat{AD} = 80^\circ \end{cases} \Rightarrow 4\widehat{AD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 30^\circ$$

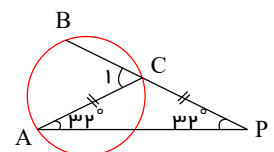
$$\Rightarrow \widehat{ACD} = \frac{1}{2}\widehat{AD} = 15^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{AB} \\ \widehat{B} = 2\widehat{D} \\ \widehat{P} = \widehat{D} + \widehat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{P} = 3\widehat{D} = \frac{3}{2}\widehat{AB}$$

در نتیجه زاویه $\widehat{P}$ ۱٫۵ برابر کمان AB است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

مطابق شکل و فرض سؤال داریم:



با توجه به فرض داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$\widehat{CBT} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

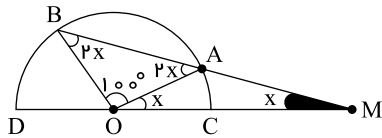
$$\widehat{AC} + \widehat{BC} + \widehat{AB} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + 80^\circ + \widehat{AB} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AC} + \widehat{AB} = 280^\circ \quad (1)$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

$$\Rightarrow 60^\circ = \frac{\widehat{AC} + 80^\circ - \widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AC} - \widehat{AB} = 40^\circ \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{AC} = 160^\circ, \widehat{AB} = 120^\circ$$

$$\widehat{CAM} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} = \frac{120^\circ + 80^\circ}{2} = \frac{200^\circ}{2} = 100^\circ$$



$$MA = OA \Rightarrow \widehat{AOC} = \hat{M} = x$$

$$\widehat{OAB} = x + x = 2x$$

$$OB = OA \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OAB} = 2x$$

$$2x + 2x + 100^\circ = 180^\circ \Rightarrow 4x = 80^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{AC} = 80^\circ$$

$$AB = BC \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BC} = \frac{360^\circ - 80^\circ}{2} = 140^\circ$$

$$\widehat{D} = x = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{140^\circ + 80^\circ}{2} = 110^\circ$$

$$\frac{360^\circ}{24} = 15^\circ \quad \text{دایره به ۲۴ قسمت تقسیم شده است پس اندازه کمان بین هر دو نقطه برابر است با: } 15^\circ$$

$$\widehat{AD} = 4 \times 15^\circ = 60^\circ, \quad \widehat{BC} = 15^\circ$$

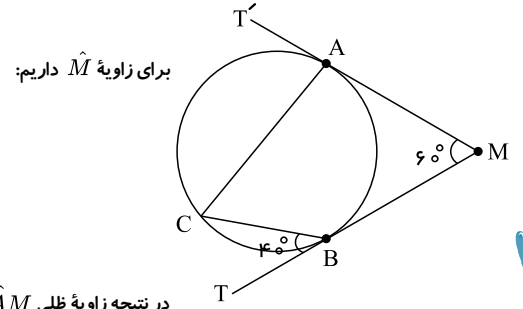
$$\Rightarrow \hat{M} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{BC}}{2} = \frac{60^\circ - 15^\circ}{2} = 22,5^\circ$$

$$\hat{O}_p = \hat{A} + \hat{E} = 48^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{BE} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 17^\circ = \frac{48^\circ - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{CD} = 14^\circ$$

$$\widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AMC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ, \quad AC = AB = 9$$

$$\triangle ABC : \widehat{AMC} = 90^\circ, \quad AB = AC \Rightarrow BM = MC = \frac{BC}{2}$$



در نتیجه زاویه ظلی $\widehat{CAM}$ برابر است با:

با توجه به شکل داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

از طرفی $\widehat{OAB}$ زاویه خارجی مثلث OAM است، بنابراین:

از طرف دیگر:

بنابراین در مثلث OAB :

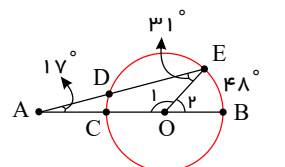
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

بنابراین داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

در مثلث AOE ، زاویه خارجی $\hat{O}_p$ برابر است با:



داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۸

$$BN \times BA = BM \times BC \Rightarrow 2 \times 9 = \frac{BC}{2} \times BC = BC^2 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۹

طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$OA \times OB = OC \times OD \\ \Rightarrow 9 \times 4 = 5 \times OD \Rightarrow OD = 7,2$$

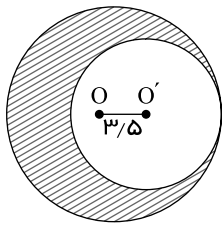
۱ ۲ ۳ ۴ ۲۰ طبق روابط طولی داریم:

$$AD \times AE = AF \times AG = AB \times AC$$

$$AD(AD + 8) = 6 \times 8 = 48 \Rightarrow AD^2 + 8AD - 48 = 0$$

$$(AD + 12)(AD - 4) = 0 \Rightarrow AD = 4 \Rightarrow AE = 4 + 8 = 12$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۱



$$OO' = r - r' = 3,5$$

$$S_{\text{دایره کوچکتر}} = S_{\text{دایره بزرگتر}} - S_{\text{هشور}}$$

$$21\pi = \pi r^2 - \pi r'^2 \rightarrow 21 = r^2 - r'^2$$

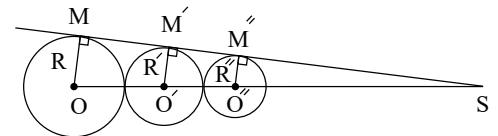
$$\rightarrow 21 = (r - r')(r + r') \rightarrow 21 = 3,5 \times (r + r')$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} r + r' = 6 \\ r - r' = 3,5 \end{array} \right\} \rightarrow 2r' = 2,5 \rightarrow r' = 1,25$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۲ چون $8 - 5 < 4 < 8 + 5$ بنابراین $|R - R'| < d < R + R'$ پس دو دایره متقاطع هستند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۳ فرض کنید مماس مشترک خارجی MM' خط‌المركزین دایره‌ها را در S قطع کند، داریم:

$$\frac{SO}{SO'} = \frac{R}{R'} \Rightarrow \frac{SO}{SO - SO'} = \frac{R}{R - R'} \\ \Rightarrow \frac{SO}{8} = \frac{5}{5 - 3} = \frac{5}{2} \Rightarrow SO = 20$$



$$\Rightarrow SO'' = 20 - (5 + 3 + 3 + 1) = 8$$

اگر MM' بر دایره کوچک‌تر هم مماس باشد خواهیم داشت:

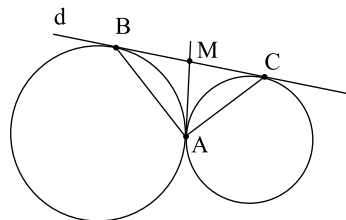
$$\frac{SO}{SO''} = \frac{OM}{O''M''} \Rightarrow \frac{20}{8} = \frac{5}{O''M''} \Rightarrow O''M'' = 2$$

$O''M''$ برابر شعاع دایره کوچک‌تر یعنی ۱ نیست پس خط مماس بر هر سه دایره وجود ندارد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۴ چون دو دایره یک مماس مشترک دارند پس مماس درونی‌اند و داریم:

$$d = |R - R'| \rightarrow |(3a - 1) - (a + 5)| = 3a \rightarrow |2a - 6| = 3a \rightarrow \begin{cases} 2a - 6 = 3a \rightarrow a = -6 \text{ (غیق)} \\ 2a - 6 = -3a \rightarrow 5a = 6 \rightarrow a = \frac{6}{5} \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲۵



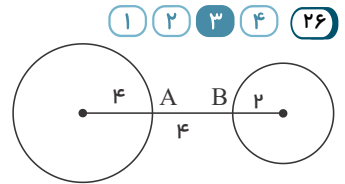
مطابق شکل، مماس مشترک داخلی دو دایره در نقطه M مماس مشترک خارجی (خط d) را قطع کرده است. از آنجا که از هر نقطه خارج از دایره می‌توان دو مماس هم‌اندازه بر آن دایره رسم کرد، داریم:

$$\begin{cases} MA = MB \\ MA = MC \end{cases} \Rightarrow MA = MB = MC$$

در نتیجه AM میانه BC و نصف آن ضلع است، پس مثلث ABC در رأس A قائمه بوده و نقطه M مرکز دایره محیطی آن است و شعاع دایره محیطی برابر می‌شود با:

$$\begin{cases} R = \frac{BC}{2} \\ BC = 2\sqrt{r \cdot r'} = 2\sqrt{4 \times 3} = 4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$d = OO' = 10.$$



$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{100 - (2 + 4)^2} = 8$$

$$d' = 14 \text{ (طول جدید خط مرکزین)} \Rightarrow d = R + R' = 2 + 8 = 10 \Rightarrow$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d'^2 - (R + R')^2} = \sqrt{14^2 - (8 + 2)^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۶)

(۱) مماس‌های رسم شده بر دایره از نقطه P برابرند. از هم‌نهمی دو مثلث PMO و PNO این مطلب قابل اثبات است.

(۲) داریم:

$$\widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow \triangle OMH \sim \triangle MHP \text{ (ج)} \Rightarrow \frac{OH}{MH} = \frac{MH}{PH} \Rightarrow MH^2 = OH \times PH$$

(۳) این رابطه نادرست است و داریم:

$$\widehat{M} = \widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow \triangle PMH \sim \triangle OMP \Rightarrow \frac{PM}{OP} = \frac{PH}{PM}$$

$$\Rightarrow PM^2 = PH \times OP$$

(۴)

$$S_{\triangle OMP} = \frac{1}{2} MH \times OP = \frac{1}{2} OM \times MP$$

$$\Rightarrow MH \times OP = OM \times MP, MH = \frac{MN}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{2} \times OP = R \times MP \Rightarrow OP \times MN = 2R \times MP$$

شعاع دایره بزرگ را R فرض می‌کنیم پس مساحت آن می‌شود: (۱) (۲) (۳) (۴) (۲۹)

$$S_{\text{کل}} = \pi R^2$$

قطر دایره کوچک برابر شعاع دایره بزرگ است $\Rightarrow r = \frac{R}{2}$ و مساحت آن می‌شود:

$$S_{\text{دایره کوچک}} = \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$$

حال مساحت قسمت رنگی را به دست می‌آوریم:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{کل}} - S_{\text{دایره کوچک}} = \pi R^2 - 2 \times \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{رنگی}}}{S_{\text{کل}}} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}}{\pi R^2} = \frac{1}{2}$$

چون دایره بر مربع بزرگ‌تر مماس است پس قطر دایره برابر است با طول ضلع مربع بزرگ. همچنین قطر دایره برابر است با قطر مربع کوچک‌تر. داریم: (۱) (۲) (۳) (۴) (۳۰)

$$R = \text{شعاع دایره} \Rightarrow \text{قطر دایره} = \text{ضلع مربع بزرگ} \Rightarrow 2R = a \Rightarrow a = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{قطر دایره} = \text{قطر مربع کوچکتر} \Rightarrow 2R = \sqrt{2}a' \Rightarrow 2 \times 4 = \sqrt{2}a' \Rightarrow a' = 4\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت مربع کوچک} - \text{مساحت مربع بزرگ} = \text{مساحت هاشورزده}$$

$$\Rightarrow a'^2 - a^2 = 64 - 32 = 32$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴

۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴